第27卷 第1期　　工　程　数　学　学　报　　Vol. 27 No. 1
2010年02月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Feb. 2010

**文章编号**:1005-3085(2010)01-0078-07

# 无失效数据下失效概率的多层Bayes和E Bayes估计的性质

王建华[1,2]，　袁　力[2]

(1- 华中科技大学数学与统计学院，武汉　430074；　2- 武汉理工大学理学院数学系，武汉　430070)

**摘　要**: 高可靠性产品的可靠性试验很难获得样品失效的数据，可靠性参数估计涉及无失效数据分析，Bayes方法是处理无失效数据分析的有力方法。多层Bayes参数估计涉及到Beta函数比的积分。利用Gamma函数比不等式，导出Beta函数比不等式及Beta函数比的积分不等式，证明了无失效数据下失效概率的E Bayes估计与多层Bayes估计渐近相等，且给出多层Bayes估计值小于E Bayes估计值的一个充分条件。

**关键词**: 失效概率；E Bayes估计；多层Bayes估计；不等式

**分类号**: **AMS**(2000) 62F12; 62F15　　**中图分类号**: O212.8　　**文献标识码**: A

## 1　引言

在可靠性试验中，对高可靠性产品进行定时截尾试验，在规定的试验时间内往往没有样品失效，获得的数据为无失效数据。基于无失效数据的可靠性参数估计对高可靠性产品的可靠性研究具有重要的理论和应用价值。Martz和Waller在1979年对无失效数据进行Bayes分析[1]；茆诗松，罗朝斌，张忠占，杨振海在1989年对无失效数据进行分析[2,3]；赵海兵，程依明在2004年对指数分布场合下失效数据的统计分析[4]；张志华，姜礼平在2004年对正态分布场合下失效数据的统计分析[5]。韩明博士对无失效数据进行了系统的研究[6-9]，所作专著[6]是这一研究成果的总结。无失效数据的可靠性参数多层Bayes估计涉及Beta函数比的积分，往往给出数值算例说明，其性质研究较少。韩明由数值算例分析给出关于无失效数据的可靠性参数多层Bayes和E Bayes估计性质的三个命题(文献[6]中命题2.1，命题3.1，命题6.1)。文献[7-10]给出失效率的性质(命题2.1)的数学证明，文献[11]给出可靠度的性质(命题6.1)的数学证明。本文给出失效概率的性质(命题3.1)的数学证明。

设某产品的寿命为$T$，对产品进行$m$次定时截尾试验，结果所有样品无一失效，获得的无失效数据为$(n_i,t_i)$，$i=1,2,\cdots,m$，$t_i\,(t_1<t_2<\cdots<t_m)$为第$i$次定时截尾试验的截尾时间，相应的试验样品数为$n_i$，在时刻$t_i$处的失效概率为$p_i=P\,(T\le t_i)$。若获得失效概率的估计$\hat{p_i}$，则可得寿命分布参数估计，从而求得可靠度的估计。若$p_i$的先验分布为Beta分布，其密度函数为

$$\pi\,(p_i\mid a,b)=\frac{p_i^{a-1}(1-p_i)^{b-1}}{B(a,b)},\tag{1}$$

**收稿日期**: 2007-10-30.　**作者简介**: 王建华(1965年5月生)，男，博士，副教授. 研究方向：应用概率统计与金融数学.

其中 $0<p_i<1$，$a>0$，$b>0$，$a$ 和 $b$ 为超参数。

$$B(a,b)=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathrm{d}t$$

为 Beta 函数。

当 $0<a<1$，$b>1$ 时，$\pi(p_i\,|\,a,b)$ 为 $p_i$ 的单调减函数，满足多层先验分布减函数构造法要求。尾部越细的先验分布会使 Bayes 估计的稳健性越差，因此在 $0<a<1$ 时，$b$ 不宜过大，设 $b$ 的上界为 $c\,(c>1$ 为常数)。超参数 $a$ 和 $b$ 的取值范围为区域 $D=\{(a,b)\mid 0<a<1,\ 1<b<c\}$。设 $a$ 的先验分布为 (0,1) 上的均匀分布，$b$ 的先验分布为 $(1,c)$ 上的均匀分布，记 $\pi(a,b)$ 为 $a$ 与 $b$ 的先验联合密度，令 $s_i=\sum\limits_{j=i}^{m}n_j$，则在 $a$ 和 $b$ 独立时，$p_i$ 的多层先验密度函数为

$$\pi(p_i)=\iint_D \pi\left(p_i\mid a,b\right)\pi(a,b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b=\frac{1}{(c-1)}\iint_D\frac{p_i^{a-1}(1-p_i)^{b-1}}{B(a,b)}\mathrm{d}a\mathrm{d}b,$$

其中 $0<p_i<1$。$p_i$ 的多层 Bayes 估计 (Hierarchical Bayes Estimation) 为 [6]

$$\hat{p}_{iHB}=\frac{\iint_D\frac{B(a+1,\,b+s_i)}{B(a,\,b)}\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{\iint_D\frac{B(a,\,s_i+b)}{B(a,\,b)}\mathrm{d}a\mathrm{d}b},\tag{2}$$

$p_i$ 的 E Bayes 估计 (Expected Bayes Estimation) 如下[6]。

**定理 1** 对某产品进行 $m$ 次定时截尾试验，结果所有样品无一失效，获得的无失效数据为 $(n_i,t_i)$，$i=1,2,\cdots,m$，$t_i$ 为第 $i$ 次定时截尾试验的截尾时间，相应的试验样品数为 $n_i$，记 $s_i=\sum\limits_{j=i}^{m}n_j$，在时刻 $t_i\,(t_1<t_2<\cdots<t_m)$ 处失效的概率为 $p_i=P\,(T\le t_i)$。若 $p_i$ 的先验密度函数由 (1) 给出，则有

(i) 在平方损失下，$p_i$ 的 Bayes 估计为

$$\hat{p}_{iB}(a,b)=\frac{a}{s_i+a+b}.$$

(ii) 若 $a$ 和 $b$ 在区域 $D$ 上的先验分布为均匀分布，则 $p_i$ 的 E Bayes 估计为

$$\hat{p}_{iEB}=\iint_D\hat{p}_{iB}(a,b)\pi(a,b)\mathrm{d}a\mathrm{d}b=\frac{1}{c-1}\iint_D\frac{a}{s_i+a+b}\mathrm{d}a\mathrm{d}b.$$

文献 [6] 中命题 3.1 为如下定理。

**定理 2** 在定理 1 和式 (2) 中，$p_i$ 的 E Bayes 估计 $\hat{p}_{iEB}$ 和 $p_i$ 的多层 Bayes 估计 $\hat{p}_{iHB}$ 满足：

(i) $\lim\limits_{s_i\to\infty}\hat{p}_{iEB}=\lim\limits_{s_i\to\infty}\hat{p}_{iHB}$； (ii) 当 $s_i>\left(\frac{c+1}{c-1}\right)^{\frac{1}{3}}(c+1)e^4-c$ 时，$\hat{p}_{iHB}<\hat{p}_{iEB}$。

为证明定理 2，先给出一些有用的引理。

## 2 引理

**引理 1** $s_i$ 为正整数，$a$ 和 $b$ 为实数，当 $0<a<1$，$b>1$ 时

$$\left(\frac{b-1}{s_i+b}\right)^a<\frac{B(a,s_i+b)}{B(a,b)}<\left(\frac{b+1}{s_i+b}\right)^a.$$

**证明** Elezovic 等证明了两个 Gamma 函数比的不等式[12]

$$\Big(x+\frac{b_0+a-1}{2}\Big)^{a-b_0}<\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x+b_0)}<(x+b_0)^{a-b_0},\tag{3}$$

其中实数 $a$ 和 $b_0$ 满足 $0\le b_0<a<b_0+1$，且 $x>-b_0$。若 $b_0=0$，则 (3) 式变为

$$\Big(x-\frac{1-a}{2}\Big)^{a}<\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x)}<x^{a},\tag{4}$$

其中实数 $0<a<1$，且 $x>0$。

取 $x=b>1$，则 (4) 式变为

$$\frac{1}{b^a}<\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}<\frac{1}{(b-\frac{1-a}{2})^a}.\tag{5}$$

取 $x=b+s_i$，则 (4) 式可变为

$$\frac{1}{(s_i+b)^a}<\frac{\Gamma(s_i+b)}{\Gamma(s_i+a+b)}<\frac{1}{(s_i+b-\frac{1-a}{2})^a}.\tag{6}$$

由 Beta 函数和 Gamma 函数的关系式

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

可知

$$\frac{B(a,s_i+b)}{B(a,b)}=\frac{\Gamma(s_i+b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(s_i+a+b)\Gamma(b)}.$$

将 (5) 式和 (6) 式代入可得

$$\Big(\frac{b-\frac{1-a}{2}}{s_i+b}\Big)^a<\frac{B(a,s_i+b)}{B(a,b)}<\Big(\frac{b}{s_i+b-\frac{1-a}{2}}\Big)^a.$$

从而

$$\Big(\frac{b-1}{s_i+b}\Big)^a<\frac{B(a,s_i+b)}{B(a,b)}<\Big(\frac{b+1}{s_i+b}\Big)^a.$$

**引理2** 对于实数 $c>1$ 和正整数 $s_i>1$，有

$$\iint_D\Big(\frac{b-1}{s_i+b}\Big)^a\mathrm{d}a\mathrm{d}b>\frac{s_i+1}{\frac{c+s_i}{c-1}\ln\frac{c+s_i}{c-1}}\Big[1-\frac{1}{\ln\frac{c+s_i}{c-1}}\Big],$$

$$\iint_D\frac{a}{s_i+b}\Big(\frac{b+1}{s_i+b}\Big)^a\mathrm{d}a\mathrm{d}b<\frac{1}{\big(\ln\frac{c+s_i}{c+1}\big)^2}\frac{c-1}{c+s_i}.$$

证明

$$\begin{aligned}&\iint_D\left(\frac{b-1}{s_i+b}\right)^a\mathrm{d}a\mathrm{d}b\\=&\ (s_i+1)\int_1^c\frac{1}{(s_i+b)\ln\left(\frac{s_i+b}{b-1}\right)}\mathrm{d}b=(s_i+1)\int_{\ln\frac{c+s_i}{c-1}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\mathrm{e}^x-1)}\\>&\ (s_i+1)\int_{\ln\frac{c+s_i}{c-1}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\mathrm{e}^x}=(s_i+1)\left[\frac{1}{\frac{c+s_i}{c-1}\ln\frac{c+s_i}{c-1}}-\int_{\ln\frac{c+s_i}{c-1}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\mathrm{e}^x}\right]\\>&\ (s_i+1)\left[\frac{1}{\frac{c+s_i}{c-1}\ln\frac{c+s_i}{c-1}}-\frac{1}{\left(\ln\frac{c+s_i}{c-1}\right)^2}\int_{\ln\frac{c+s_i}{c-1}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x}\right]\\=&\ \frac{s_i+1}{\frac{c+s_i}{c-1}\ln\frac{c+s_i}{c-1}}\left[1-\frac{1}{\ln\frac{c+s_i}{c-1}}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\iint_D\frac{a}{s_i+b}\left(\frac{b+1}{s_i+b}\right)^a\mathrm{d}a\mathrm{d}b\\=&\int_1^c\frac{-1}{(s_i+b)\ln\left(\frac{s_i+b}{b+1}\right)}\left(\frac{b+1}{s_i+b}\right)\mathrm{d}b+(s_i-1)\int_1^c\frac{1}{(s_i+b)^2\left[\ln\left(\frac{s_i+b}{b+1}\right)\right]^2}\mathrm{d}b\\=&-\int_{\ln\frac{c+s_i}{c+1}}^{\ln\frac{1+s_i}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}+\int_{\ln\frac{c+s_i}{c+1}}^{\ln\frac{1+s_i}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\mathrm{e}^x}<\int_{\ln\frac{c+s_i}{c+1}}^{\ln\frac{1+s_i}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2\mathrm{e}^x}\\<&\ \frac{1}{\left(\ln\frac{c+s_i}{c+1}\right)^2}\int_{\ln\frac{c+s_i}{c+1}}^{\ln\frac{1+s_i}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x}=\frac{1}{\left(\ln\frac{c+s_i}{c+1}\right)^2}\frac{(c-1)(s_i-1)}{(1+s_i)(c+s_i)}<\frac{1}{\left(\ln\frac{c+s_i}{c+1}\right)^2}\frac{c-1}{c+s_i}.\end{aligned}$$

**引理3**　对于实数$c>1$和正整数$s_i$，有

$$\hat{p}_{iEB}=\frac{1}{2(c-1)}\left[(c-1)-(s_i+c)^2\ln\frac{s_i+1+c}{s_i+c}+(s_i+1)^2\ln\frac{s_i+2}{s_i+1}+\ln\frac{s_i+1+c}{s_i+2}\right].$$

**证明**　直接计算积分即可证。

**引理4**　对于实数$\beta>0$，当$x>\frac{4}{3}\beta+4$时，有$k(x)=(x-1)(x-\beta)^2-\frac{8}{3}x^2>0$。

**证明**　当

$$x>\frac{11+6\beta+\sqrt{9\beta^2+78\beta+121}}{9}$$

时，

$$k'(x)=(x-\beta)^2+2(x-1)(x-\beta)-\frac{16}{3}x=3\left(x-\frac{11+6\beta}{9}\right)^2-\frac{9\beta^2+78\beta+121}{27},$$

$k'(x)>0$，$k(x)$是严格单调递增的函数，取$x_0=\frac{4}{3}\beta+4$，显然有

$$x_0>\frac{11+6\beta+\sqrt{9\beta^2+78\beta+121}}{9},$$

而$k(x_0)=\frac{4}{27}\beta(\beta-3)^2+\frac{1}{27}(\beta-6)^2+4>0$，所以当$x>x_0=\frac{4}{3}\beta+4$时，有$k(x)>k(x_0)>0$。

**引理5** 对于实数$c>1$和正数$s_i$，有

$$g(s_i)=(c-1)-\Big[(c+s_i)^2\ln\frac{c+1+s_i}{c+s_i}-(1+s_i)^2\ln\frac{2+s_i}{1+s_i}\Big]>0.$$

**证明** $g'''(s_i)<0$, $g''(s_i)$单调递减，而

$$\lim_{s_i\to\infty}g''(s_i)=0,$$

所以$g''(s_i)>0$；$g'(s_i)$单调递增，而$\lim\limits_{s_i\to\infty}g'(s_i)=0$，所以$g'(s_i)<0$；$g(s_i)$单调递减，而$\lim\limits_{s_i\to\infty}g(s_i)=0$，所以$g(s_i)>0$。

## 3 主要定理的证明

**定理2的证明** (i) $\dfrac{a}{s_i+a+b}$是$a$的单调增函数，是$b$的单调减函数，$0<a<1$, $1<b<c$，所以

$$0<\frac{a}{s_i+a+b}<\frac{1}{s_i+2}.$$

由此可证

$$0<\frac{\iint_D\frac{B(a+1,s_i+b)}{B(a,b)}\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{\iint_D\frac{B(a,s_i+b)}{B(a,b)}\mathrm{d}a\mathrm{d}b}<\frac{1}{s_i+2},\quad 0<\frac{1}{c-1}\iint_D\frac{a}{s_i+a+b}\mathrm{d}a\mathrm{d}b<\frac{1}{s_i+2},$$

从而$\lim\limits_{s_i\to\infty}\hat{p}_{iEB}=\lim\limits_{s_i\to\infty}\hat{p}_{iHB}=0$。

(ii) 由引理1易知

$$\iint_D\frac{B(a,s_i+b)}{B(a,b)}\mathrm{d}a\mathrm{d}b>\iint_D\Big(\frac{b-1}{s_i+b}\Big)^a\mathrm{d}a\mathrm{d}b,$$

$$\iint_D\frac{aB(a,s_i+b)}{(s_i+a+b)B(a,b)}\mathrm{d}a\mathrm{d}b<\iint_D\frac{a}{s_i+b}\Big(\frac{b+1}{s_i+b}\Big)^a\mathrm{d}a\mathrm{d}b.$$

所以

$$\hat{p}_{iHB}=\frac{\iint_D\frac{B(a+1,s_i+b)}{B(a,b)}\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{\iint_D\frac{B(a,s_i+b)}{B(a,b)}\mathrm{d}a\mathrm{d}b}=\frac{\iint_D\frac{aB(a,s_i+b)}{(a+b+s_i)B(a,b)}\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{\iint_D\frac{B(a,s_i+b)}{B(a,b)}\mathrm{d}a\mathrm{d}b}<\frac{\iint_D\frac{a}{s_i+b}\big(\frac{b+1}{s_i+b}\big)^a\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{\iint_D\big(\frac{b-1}{s_i+b}\big)^a\mathrm{d}a\mathrm{d}b}.$$

由引理2可证$\lim\limits_{s_i\to\infty}(c+s_i)\hat{p}_{iHB}=0$，由引理3可证$\lim\limits_{s_i\to\infty}(c+s_i)\hat{p}_{iEB}=\frac{1}{2}$，因此存在$N>0$，当$s_i>N$时，$(c+s_i)\hat{p}_{iHB}<(c+s_i)\hat{p}_{iEB}$，从而$\hat{p}_{iHB}<\hat{p}_{iEB}$。

下面进一步探讨$N$的取值。要使$\hat{p}_{iHB}<\hat{p}_{iEB}$成立，只要下式成立

$$\begin{aligned}&2(c-1)\frac{\big(\ln\frac{c+s_i}{c-1}\big)^2}{\big(\ln\frac{c+s_i}{c+1}\big)^2}\frac{1}{1+s_i}\frac{1}{\ln\frac{c+s_i}{c-1}-1}\\&<\ (c-1)-\Big[(c+s_i)^2\ln\frac{c+1+s_i}{c+s_i}-(1+s_i)^2\ln\frac{2+s_i}{1+s_i}\Big]+\ln\frac{c+1+s_i}{2+s_i}.\end{aligned}$$

设

$$g(s_i)=(c-1)-\Big[(c+s_i)^2\ln\frac{c+1+s_i}{c+s_i}-(1+s_i)^2\ln\frac{2+s_i}{1+s_i}\Big],$$

$$h(s_i)=\ln\frac{c+1+s_i}{2+s_i}-2(c-1)\frac{\big(\ln\frac{c+s_i}{c-1}\big)^2}{\big(\ln\frac{c+s_i}{c+1}\big)^2}\frac{1}{1+s_i}\frac{1}{\ln\frac{c+s_i}{c-1}-1}.$$

当 $s_i>2c>2$ 时，可证

$$h(s_i)>\frac{3(c-1)}{4(1+s_i)}\frac{\big(\ln\frac{c+s_i}{c-1}-1\big)\big(\ln\frac{c+s_i}{c+1}\big)^2-\frac{8}{3}\big(\ln\frac{c+s_i}{c-1}\big)^2}{\big(\ln\frac{c+s_i}{c-1}-1\big)\big(\ln\frac{c+s_i}{c+1}\big)^2}.$$

设

$$x=\ln\frac{c+s_i}{c-1},\quad \beta=\ln\frac{c+1}{c-1},$$

显然有 $x>0$, $\beta>0$，则

$$k(x)=\Big(\ln\frac{c+s_i}{c-1}-1\Big)\Big(\ln\frac{c+s_i}{c+1}\Big)^2-\frac{8}{3}\Big(\ln\frac{c+s_i}{c-1}\Big)^2=(x-1)(x-\beta)^2-\frac{8}{3}x^2.$$

由引理4知，当 $x>\frac{4}{3}\beta+4$ 时，即当

$$s_i>\Big(\frac{c+1}{c-1}\Big)^{\frac{1}{3}}(c+1)e^4-c$$

时，$k(x)>0$。此时也有 $s_i>2c$，从而 $h(s_i)>0$。又由引理5知，$g(s_i)>0$，所以 $g(s_i)+h(s_i)>0$，从而 $\hat{p}_{iHB}<\hat{p}_{iEB}$ 成立。因此 $N$ 可取值为 $\big(\frac{c+1}{c-1}\big)^{\frac{1}{3}}(c+1)e^4-c$，定理2得证。

## 参考文献：


[1] Martz H F, Waller R A. A Bayesian zero-failure reliability demonstration testing procedure[J]. Journal of Quality Technology, 1979, 11(3): 128-137

[2] 茆诗松，罗朝斌. 无失效数据的可靠性分析[J]. 数理统计与应用概率，1989, 4(4): 489-506
Mao S S, Luo C B. Reliability analysis of zero-failure data[J]. Mathematical Statistics and Applied Probability, 1989, 4(4): 489-506

[3] 张忠占，杨振海. 无失效数据的处理[J]. 数理统计与应用概率，1989, 4(4): 507-516
Zhang Z Z, Yang Z H. Treatment of zero-failure data[J]. Mathematical Statistics and Applied Probability, 1989, 4(4): 507-516

[4] 赵海兵，程依明. 指数分布场合下失效数据的统计分析[J]. 应用概率统计，2004, 20(1): 59-65
Zhao H B, Cheng Y M. Statistical analysis about zero-failure data using memoryless property of exponential distribution[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statisties, 2004, 20(1): 59-65

[5] 张志华，姜礼平. 正态分布场合下失效数据的统计分析[J]. 工程数学学报，2005, 22(4): 741-744
Zhang Z H, Jiang L P. Statistical analysis of zero-failure data based on the normal distribution[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2005, 22(4): 741-744

[6] 韩明. 基于无失效数据的可靠性参数估计[M]. 北京：中国统计出版社，2005
Han M. Reliability Parameter Estimation of Zero-failure Data[M]. Beijing: China Statistics Press, 2005

[7] 韩明. 失效率的E-Bayes估计及其性质[J]. 数学物理学报，2007, 27A(3): 488-495
Han M. Expected Bayesian estimation of failure probability and its character[J]. Acta Mathematica Scientia, 2007, 27A(3): 488-495

[8] 韩明. 失效率的E-Bayes估计和多层Bayes估计[J]. 高校应用数学学报，2008, 23(4): 399-407
Han M. E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate[J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2008, 23(4): 399-407

[9] Han M. E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate[J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33(4): 1915-1922

[10] 王建华，夏小艳. 指数分布参数多层Bayes和E Bayes估计的性质[J]. 应用数学，2008, 21S: 33-36
Wang J H, Xia X Y. The property of hierarchical Bayesian and E Bayesian estimation of exponent distribution's parameter[J]. Mathematica Applicata, 2008, 21S: 33-36

[11] 王建华，毛娟. 二项分布参数多层Bayes和E Bayes估计的性质[J]. 纯粹数学与应用数学，2009, 25(2): 223-230
Wang J H, Mao J. The property of hierarchical Bayesian and E Bayesian estimation of binomial distribution's parameter[J]. Pure and Applied Mathematics, 2009, 25(2): 223-230

[12] Elezovic N, *et al.* The best bounds in Gautschi's inequality[J]. Mathematical Inequalities & Applications[J]. 2000, 3(2): 239-252

# Properties of Hierarchical Bayesian and E Bayesian Estimations of the Failure Probability in Zero-failure Data

WANG Jian-hua[1,2], YUAN Li[2]

(1- College of Mathematics and Statistics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074; 2- Department of Mathematics, College of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070)

**Abstract:** It is difficult to get the samples of the failure in a experiment for higher reliability productions, and its reliability parameter estimation involves the zero-failure data analysis. The Bayesian method is powerful for solving this problem. As we know, the hierarchical Bayesian estimation of a reliability parameter is an integral of Beta functions ratio. In this paper, an inequality about Beta functions ratio is induced, and an integral inequality of Beta functions ratio is established. We prove that the E Bayesian estimation of failure probability is asymptotic equal to its hierarchical Bayesian estimation in the zero-failure data, and give a sufficient condition on which the hierarchical Bayesian estimation of failure probability is less than the E Bayesian estimation.

**Keywords:** *failure probability; E Bayesian estimation; hierarchical Bayesian estimation; inequality*

**Received:** 30 Oct 2007. **Accepted:** 07 Sep 2008.